# 민코프스키 공간에서 텐서 해석과 운용을 위한 매스매티카 시뮬레이션

윤희중

(Received 8 August, 2006)

모든 좌표계에서 물리학 법칙이 불변성을 갖기 위해서는 텐서로 기술되어야 하며, 비 균질, 비 등방성, 압축성 매질에서 전자기적 특성과 전자기파의 전파 거동을 기술 할 때에도 텐서로 기술된다. 전자기장도 전기장 $\vec{E}$와 자기장 $\vec{B}$을 벡터 방정식으로 따로 따로 기술하기 보다 전기장 $\vec{E}$와 자기장 $\vec{B}$를 통합한 하나의 전자기장 텐서 $F^{\alpha\beta}$로 기술되면서 전자기학 시스템 구조가 완성되기 때문이다. 우리는 여기에서 3-vector 공간에서 사중극자 모멘트 텐서와 관성 텐서를, 민코프스키 공간에서 전자기장 텐서 $F^{\alpha\beta}$를 생성하고 변환하는 매스매티카 시뮬레이션을 제시함으로 물리학도들이 효과적으로 텐서 해석 운용능력을 갖추고 우아하고 정교한 물리학 지식체계를 정립하는데 도움이 되게 하였다.

keywords: 사중극자 모멘트 텐서, 관성 텐서,전자기장 텐서, 특수상대성, 매스매티카 시뮬레이션

## I. 서 론

물리학과의 학부와 대학원 학습과정에서 텐서 해석은 벡터해석과 함께 가장 기본적이며 필수적인 학습과제 이다. 전자기학뿐만 아니라 상대성 이론, 일반역학, 양자역학, 유체역학, 구조역학에서 텐서가 물리학적 구조를 기술하는 기본적인 도구이기 때문이다 [1–5]. 최근 컴퓨터의 발달과 함께 물리학 교수학습에 컴퓨터 계산 시스템을 도입하여 학습환경을 개선하려는 노력들이 활발하게 진행되어 왔다 [6, 10, 11]. 특히 대학의 물리학 교과과정에 수치연산과 함께 기호계산이 탁월한 매스매티카를 도입하고 교과과정을 운용한 것은 Zimmerman교수가 처음이다 [6]. 그 후 많은 대학에서 전적으로 혹은 부분적으로 매스매티카 시스템을 교과운영에 적용하고 활용하는 연구가 활발하게 진행되어 왔으며 많은 결과들이 발표되었다 [15–18]. Jackson 교재 [4]의 11장에 있는 대부분의 전자기학 시스템의 텐서 방정식을 매스매티카 시뮬레이션으로 구현한 경우도 있다 [19]. 그러나 매스매티카 프로그램 제작에 익숙하지 않으면 단위계 혹은 *BaseIndices*가 다른 경우에는 텐서 생성과 운용에 많은 부담을 갖는다. 그리하여 우리는 SI 단위계를 취하는 Reitz 교재 [3]의 22장에 기술된 전자기장 텐서 방정식을 매스매티카 시스템에서 구현함으로써 전자기학 학습의 완성도를 높이고 계산엔진 시스템을 구비한 물리학도들이 효과적으로 텐서 학습을 하는데 도움이 되도록 하였다. 본 논문에서는 *Mathematica* 5.1 버전에서 [11] 간편하게 Reitz교재의 사중극자 모멘트 텐서(quadrupole moment tensor) [3], Marion교재의 관성모멘트 텐서(inertia tensor) [2]를 구하는 방법과, Tesorial 3.0에서 전자기장 텐서 $F^{\alpha\beta}$ [3]를 생성하고 변형하는 방법을 기술하였다.

## II. 텐서로 기술되는 물리학적 지식체계

일반적으로 등방성, 비압축성이며 균질한 매질 속에서 물리적 특성을 벡터로 기술하면 충분하다. 그러나 비등방성, 비균질적, 압축성인 매질 속에서 물리적인 특성을 벡터로 기술하는데는 한계가 있으며 텐서로 기술해야 한다. 고체에서 전기 전도도를 나타내는 옴의 법칙 $\vec{J} = \sigma\vec{E}$이 등방성인 매질에서 $\vec{J}$나 $\vec{E}$는 전부 벡터이고 $\sigma$는 스칼라이다. 벡터로 기술하는 것으로 충분하다. 그러나 매질이 비등방성 일 때는 전류밀도 벡터는 일정한 방향이 아니고 $J_i = \sum_k \sigma_{ij} E_k$가 되어 결국 9개의 원소를 갖는 전도도 텐서 $\sigma_{ik}$를 써서 나타낼 수 밖에 없다 [5]. 유전체에서 편극 $\vec{P} = \chi\vec{E}$의 감수율 $\chi$가 스칼라가 아니고 텐서임으로 파동방정식도 이에 따라 전파되는 빛의 거동이 달라지면서 위상속도,굴절률이 정의되고 이에 따라 결정체를 등방, 단축,쌍축 결정체로 분류하고 이 분류에 따라 결정체의 전기적,광학적 특성도 달라지게 된다 [7]. 전자기학에서 전기장 벡터 $\vec{E}$ 와 자기장 벡터 $\vec{B}$를 따로 따로 정의하고 취급 할 수도 있지만, 이를 통합하여 하나의 전자기장 텐서 $F^{\alpha\beta}$로 표현하는 것이 전자기장의 물리학적 체계를 완벽하게 기술하게 된다. 실제로 우리가 다루는 자연계의 모든 물리적 시스템은 벡터로 취급할 수 있는 시스템보다는 텐서로 통합되어 취급되어야 할 물리적 대상이 대부분이다 [8]. 그러므로 자연계의 물리학적 구조를 이해하려면 텐서 학습이 필수적이다. 학부의 전자기학 과정에서 막스웰 방정식까지 마치면서 전자기장 텐서 $F^{\alpha\beta}$로 기술되는 것 까지 이르지 못했다면 전자기학 학습이 완성되었다고 말 하기는 곤난 하다. 전자기장 텐서 $F^{\alpha\beta}$로 기술되는 물리적 시스템을 이해하지 못하고 학기를 마치게 된다면 물리적 시스템을 단편적으로 이해 했다 하드라도 물리학 지식체계로 정립 시키지 못하는 공허한 학습결과가 되기 쉽다. 우리는 여기서 새로운 텐서를 도입하고 해석한 것이 아니고, 학부의 교과과정에서 공통적으로 취급되었던 텐서들을 [1–9] 매스매티카 시스템에서 계산하고 확인함으로써 연구자나 학습자가 쉽게 텐서 개념을 이해하고 활용 할 수 있는 방법을 제시하였다.

## III. 매스매티카 시스템에서 텐서계산

매스매티카 시스템에서는 기본적으로 텐서 계산을 할 수 있다. 계수가 k인 텐서는 기본적으로 k-차원 테이블이므로 리스트의 집합으로 텐서를 표시할 수 있다. 그러므로 학부교재에 나오는 사중극자 모멘트 텐서, 관성모텐트 텐서, 스트레스 텐서, 전자기장 텐서 [1–3]를 생성하고 계산할 때 **Table, Array, MatrixForm**등을 이용하면 충분하다. 그러나 MathTensor [10, 13]와 같은 전문 프로그램을 이용하면 더욱 편리하게 텐서 해석을 할 수 있다. 그렇지 않고 Wolfram사의 library에 공개된 유익한 MathSource를 활용하면 편리하다 [13, 14]. 우리는 여기에서 물리학도에게 편리한 MathSource로 R. Cabrera [14]가 제공하는 Tensorial 3.0을 다운 받아 사용하였다. Tensorial 3.0에서는 **DeclareBaseIndices**로 Base인수를 편리하게 선언 할 수 있으며 **DefineTensorShortcuts**로 텐서를 정의하여, $F^{\alpha\beta}, F_{\alpha\beta}, \mathscr{F}^{\alpha\beta}, A_\beta, x^\alpha$ 와 같이 편리하게 반변텐서 혹은 공변텐서를 정의하여 운용 할 수 있다. 여기에 제시된 매스매티카 프로그램은 *라벨번호[n]*다음에 명령어를 *In[n]:=***mathematica commands**와 같이 입력하고 이의 출력은 *Out[n]=*mathematica output 와 같은 방식으로 표시된다. 사중극자 모멘트 텐서, 관성모텐트 텐서, 스트레스 텐서를 생성하는데에는 다른 MathSource나 별다른 프로그램이 필요 없고, *Mathematica* 5.1 버전(3.0이상)에서 바로 텐서를 수행하면 된다. 텐서는 벡터개념을 확창한 것이라고 말 할 수 있음으로, 스칼라, 벡터, 행렬, 미분연산자,좌표계의 운용에 익숙해 있는 물리학도들은 이미 텐서 해석을 수행 할 수 있는 기본적인 능력은 갖추고 있다. 다만 텐서로 기술된 물리적과제를 소홀히 다루었거나 텐서 표기법과 변환구조를 명백히 이해하려는 노력과 학습기회를 갖지 못한 물리학도들이 많을 뿐이다. 특히 행렬계산에 익숙해 있는 물리학도가 매스매티카 시스템 환경에 있다면 좀 더 쉽게 텐서 구조를 익히고 운용 할 수 있다. 이제 텐서 계산 환경을 점검하기 위하여 매스매티카 시스템에서 다음과 같이 입력하고 출력을 확인해 보자.

```
In[1]:=s = a;
    v={a,b,c} ;
    m={{a,b}{c,d}} ;
    t232=Table[i1+i2 i3
         {i1,2},{i2,3},{i3,2}]//MatrixForm
    TensorRanks[s]
    TensorRanks[v]
    TensorRanks[m]
    TensorRanks[t232]
Out[5]=0
Out[6]=1
Out[7]=2
Out[8]=3
```

텐서 t232의 출력을 보면 $2\times3\times2$ 차원의 텐서 구조를 직관적으로 이해 할 수 있다(여기에 표시하지는 안했음).

### 1. 사중극자 모멘트 텐서 (Quadrupole moment tensor,Reitz [3])

전하분포가 $\rho(\vec{r'})$일때 $r$인 위치에서 퍼텐셜 $\varphi(\vec{r})$은 $|\vec{r}-\vec{r'}|^{-1}$을 급수전개하고 $|\frac{\vec{r'}}{\vec{r}}|^2$ 이상의 항을 무시하고 정리하면 다음과 같다. 여기에서 사중극자 모멘트 텐서 $Q_{ij}$를 전하분포가 연속적인 경우와 독립적인 전하분포인 경우로 구분해서 식(2)와 식(5)와 같이 정의 할 수 있다.

*1. 연속적인 전하분포 인 경우*

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_V \frac{\rho(\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|}dv' \\ &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\{\frac{1}{r}\int_V \rho(\vec{r'})dv' + \frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\int_V \vec{r'}\rho(\vec{r'})dv' \\ &+ \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2}\frac{x_i x_j}{r^5}\underbrace{\int_V (3x'_i x'_j - \delta_{ij}r'^2)\rho(\vec{r'})dv'}_{Q_{ij}}\}\end{aligned} \tag{1}$$

여기서

$$Q_{ij} \equiv \int_V (3x'_i x'_j - \delta_{ij}r'^2)\rho(\vec{r'})dv'\} \tag{2}$$

식(2)는 Reitz교재의 식 (2-52)이다. 이식을 그대로 아래와 같은 매스매티카 코딩으로 텐서를 구한 것이 식 (3)이다.

```
In[11]:=kdel[i_,j_]:=1/; i==j;
    kdel[i_,j_]:=0/; i ≠ j;
In[12]:=quadij = Table[Integrate[ρ(3x_i x_j
-kdel[i,j]Σ_{k=1}^{3}(x_k)^2)
    ,{x_1,0,1},{x_2,0,1},{x_3,0,1}
,{i,3},{j,3}]//MatrixForm
Out[12]=
```

$$quad = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3\rho}{4} & \frac{3\rho}{4} \\ \frac{3\rho}{4} & 0 & \frac{3\rho}{4} \\ \frac{3\rho}{4} & \frac{3\rho}{4} & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

*2. 독립적인 전하분포 인 경우*

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\{\frac{1}{r}\sum_k q_k + \frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\sum_k \vec{r'}_k q_k \\ &+ \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\frac{1}{2}\frac{x_i x_j}{r^5}\underbrace{\sum_k (3x'_i x'_j - \delta_{ij}{r'_k}^2)q_k}_{Q_{ij}}\}\end{aligned} \tag{4}$$

여기서

$$Q_{ij} \equiv \sum_k (3x'_i x'_j - \delta_{ij}{r'_k}^2)q_k \tag{5}$$

식(5)을 이용하여 세점$\{(0,0,0),(0,0,-l),(0,0,l)\}$에 전하가 각각 -2q, q, q 와 같이 분포 되었을 때 [3] 퍼텐셜을 구하여 보자. 이산적인 전하분포 이므로 식(4)을 이용하여

항목별로 계산해 보면,

$$\begin{aligned}
\sum_k q_k &= (-2q+q+q) = 0 \\
\sum_k \vec{r'}_k q_k &= \vec{r'}_1 q_1 + \vec{r'}_2 q_2 + \vec{r'}_3 q_3 \\
&= (0,0,0)(-2q) + (0,0,-l)(q) + (0,0,l)(q) = 0 \\
\sum_k (3x'_i x'_j - \delta_{ij} r'^2_k) q_k &= (3x'_i x'_j - \delta_{ij} 0^2)(-2q) \\
&\quad + (3x'_i x'_j - \delta_{ij} l^2)(q) \\
&\quad + (3x'_i x'_j - \delta_{ij} l^2)(q) \\
q_{ij} &= 2q(3x'_i x'_j - \delta_{ij} l^2) \qquad (6)
\end{aligned}$$

여기에서 점 전하와 쌍극자에 의한 퍼텐셜은 다같이 0 임을 유의하여라. 다만 사중극자 텐서 만이 퍼텐셜 계산에 기여하게 되었다. 텐서를 무시하면 이 퍼텐셜은 0 일 수 밖에 없다. 4중극자 모멘트 텐서는 식(6)의 매스매티카 코딩으로 계산된다.

```
In[13]:=kdel[i_,j_]:=1/; i==j;
        kdel[i_,j_]:=0/; i =|j;
In[14]:=xvalues = { x_1 ->0, x_2 ->0, x_3 ->l};
In[15]:=triquadij= Table[2q (3x_i x_j
-kdel[i,j]l^2),{i,3},{j,3}]
In[16]:=%/.xvalues//MatrixForm
Out[16]=
```

$$triq = \begin{pmatrix} 2q(-l^2+3x_1^2) & 6qx_1x_2 & 6qx_1x_3 \\ 6qx_1x_2 & 2q(-l^2+3x_2^2) & 6qx_2x_3 \\ 6qx_1x_3 & 6qx_2x_3 & 2q(-l^2+3x_1^3) \end{pmatrix} \qquad (7)$$

$$= \begin{pmatrix} -2l^2q & 0 & 0 \\ 0 & -2l^2q & 0 \\ 0 & 0 & 4l^2q \end{pmatrix}$$

## 2. 관성 텐서 (Inertia Tensor, Marion [2])

이 절에서는 강체역학의 가장 중요한 학습과제 인 관성 텐서에 대하여 Marion교재 12장의 방정식들 [2]을 참조하여 텐서 방정식들을 매스매티카 시뮬레이션으로 구현하였다. 여기서는 관성 텐서 구하는 것을 비롯하여, 주관성 모멘트(principal moment of inertia)를 구하기 위하여 닮음변환(similarity transformation)을 수행하거나, 고유방정식(secular equation)을 풀어 대각화 한 관성능률 텐서를 구하는 과정을 매스매티카 시뮬레이션으로 명백히 보여준다. 강체가 일정한 각속도 $\vec{\omega}$로 회전하고 있는 경우의 회전운동에너지는 다음과 같이 표시될 때 관성 텐서 $I_{ij}$가 이산적인 경우(식 8)와 연속적인 경우로(식 9) 구분하여 정의된다.

*1. n개의 질점으로 구성된 경우*

$$\begin{aligned}
T_{rot} &= \frac{1}{2}\sum_\alpha m_\alpha (\vec{\omega}\times\vec{r}_\alpha)^2 \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i,j}\omega_i\omega_j \underbrace{\sum_\alpha m_\alpha[\delta_{ij}\sum_k x^2_{\alpha,k} - x_{\alpha,i}x_{\alpha,j}]}_{I_{ij}} \\
I_{ij} &\equiv \sum_\alpha m_\alpha[\delta_{ij}\sum_k x^2_{\alpha,k} - x_{\alpha,i}x_{\alpha,j}] \qquad (8)
\end{aligned}$$

*2. 밀도가 $\rho(\vec{r})$ 이고 $x_i$-axes 축의 원점에 대한 관성 텐서*

$$I_{ij} \equiv \int_V \rho(\vec{r})[\delta_{ij}\sum_k x_k^2 - x_i x_j]dv \qquad (9)$$

균일한 밀도$\rho$를 갖고 질량 M 인 한변이 b인 정육면체의 강체의 관성텐서를(Marion 교재 Example 12.2) 식 (9)에 따라 매스매티카 코딩으로 다음과 같이 구한다.

```
In[21]:=kdel[i_,j_]:=1/; i==j;
    kdel[i_,j_]:=0/; i ≠ j;
In[22]:=massrule={ρb^5-> Mb^2};
          betarule= { M b^2 -> β }
In[23]:=jtensor = Table[Integrate[ρ(
kdel[i,j]Σ_{k=1}^3(x_k)^2)
    ,{x_1,0,b},{x_2,0,b},{x_3,0,b}
,{i,3},{j,3}]
In[24]:=%/.massrule/.betarule //MatrixForm
Out[24]=
```

$$jtensor = \begin{pmatrix} \frac{2\beta}{3} & -\frac{\beta}{4} & -\frac{\beta}{4} \\ -\frac{\beta}{4} & \frac{2\beta}{3} & -\frac{\beta}{4} \\ -\frac{\beta}{4} & -\frac{\beta}{4} & \frac{2\beta}{3} \end{pmatrix} \qquad (10)$$

*3. 강체의 질량중심 축에 대한 관성 텐서*

$$\begin{aligned}
J_{ij} &= \sum_\alpha m_\alpha[\delta_{ij}\sum_k X^2_{\alpha,k} - X_{\alpha,i}X_{\alpha,j}] \\
&= \sum_\alpha m_\alpha[\delta_{ij}\sum_k (x_{\alpha,k}+a_k)^2 \\
&\quad - (x_{\alpha,i}+a_i)(x_{\alpha,j}+a_j)] \\
&= I_{ij} + \sum_\alpha m_\alpha[\delta_{ij}\sum_k {a_k}^2 - a_i a_j] \\
I_{ij} &= J_{ij} - \sum_\alpha m_\alpha[\delta_{ij}\sum_k {a_k}^2 - a_i a_j] \qquad (11)
\end{aligned}$$

질량중심에 대한 관성 텐서 계산 실예는, Marion 교재 Example 12.5로서 식 (11)을 매스매티카 시스템에서 다음과 같이 푼 것이다.

```
In[25]:=jtensor= %
In[26]:=abrule = {a_1 ->b/2,a_2->b/2,a_3 ->b/2};
          betarule= { M b^2 -> β }
In[27]:=itensor =
jtensor-Table[(M(kdel[i,j]Σ_{k=1}^3(a_k)^2),a_i a_j))
            ,{i,3},{j,3}]
In[28]:=%/.abrule/.betarule //MatrixForm
```

*Out[28]=*

$$itensor = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\beta}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\beta}{6} \end{pmatrix} \tag{12}$$

이는 질량중심에 원점을 둔 입방체의 관성 텐서이다. 이 대각화 된 관성모멘트 텐서는 주관성모멘트(principal moment of inertia) 값이 모두 같다. 이와 같은 관성능률을 갖게 되는 회전축들 $x_1, x_2, x_3$이 주축(principal axes)이다.

*4. 강체의 각운동량*

강체 안에 있는 좌표계 한 점 O에 대한 강체의 각운동량을 관성 텐서로 표시 할 수 있다.

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{p}_\alpha \\ &= \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_\alpha) \\ \vec{L} &= \sum_\alpha m_\alpha [\vec{r}_\alpha^2 \vec{\omega} - \vec{r}_\alpha (\vec{r}_\alpha \cdot \vec{\omega})] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_i &= \sum_\alpha m_\alpha [\omega_i \sum_k {x_{\alpha,k}}^2 - x_{\alpha,i} \sum_j x_{\alpha,j} \omega_j] \\ &= \sum_j \omega_j \underbrace{\sum_\alpha m_\alpha [\delta_{ij} \sum_k {x_{\alpha,k}}^2 - x_{\alpha,i} x_{\alpha,j}]}_{I_{ij}} \\ L_i &= \sum_j I_{ij} \omega_j \qquad (13) \\ &\text{if } I_{ij} = I_i \delta_{ij} \\ L_i &= I_i \omega_i \qquad (14) \\ \vec{L} &= I \vec{\omega} \qquad (15) \end{aligned}$$

식 (13)과 같이 각운량 벡터는 관성 텐서로 표시된다. 또 식 (13)과(14)이 같기 위해서는

$$\begin{aligned} L_1 &= I_1 \omega_1 = I_{11}\omega_1 + I_{12}\omega_2 + I_{13}\omega_3 \\ L_2 &= I_2 \omega_2 = I_{21}\omega_1 + I_{22}\omega_2 + I_{23}\omega_3 \\ L_3 &= I_3 \omega_3 = I_{31}\omega_1 + I_{32}\omega_2 + I_{33}\omega_3 \end{aligned} \tag{16}$$

이 되어야 하고, 이들이 뻔하지 않은 해를 갖기 위해서는 고유방정식 $|I_{ml} - I\delta_{ml}| = 0$이이어야 한다. 이 방정식의 고유 값 $I_1, I_2, I_3$이 주 관성 모멘트이다. 식(10)에서 구한 관성 텐서에 대한 고유 방정식을 풀면 주 관성텐서를 대각화하고 주 관성모멘트를 구할 수 있다. 이 작업을 다음과 같이 매스매티카 시뮬레이션으로 구하였다.

```
In[30]:=jtensor
In[31]:= {
{2β/3 - J, -β/4, -β/4},{-β/4, 2β/3 - J, -β/4},{-β/4, -β/4, 2β/3 - J}};
In[32]:=secure = %
In[33]:=secsol = Solve[Det[secure]==0,J]
In[34]:=sectensor =
J/.{secsol[[1]],secsol[[2]],secsol[[3]]}
In[35]:=DiagonalMatrix[sectensor]//MatrixForm
```

*Out[35]=*

$$sectensor = \begin{pmatrix} \frac{\beta}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11\beta}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11\beta}{12} \end{pmatrix} \tag{17}$$

주 관성모멘트를 구하는 또 다른 방법은 닮은 변환에 의하여 대각화 한 관성모멘트 텐서를 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} I'_{ij} &= \textstyle\sum_{k,l} \lambda_{ik} I_{kl} \lambda^t_{lj} \qquad (18) \\ I' &= \lambda I \lambda^t \qquad (19) \end{aligned}$$

식(18)은 텐서로 표시한 것이고 (19)은 행렬로 표시한 것이다. 매스매티카에서는 텐서 계산도 행렬계산과 같은 방법으로 수행된다.

위식을 적용하여 계산한 실예로서, Marion 교재 Example 12.6(b)의 문제를 매스매티카 시뮬레이션으로 풀었다. 이 문제는 입방체의 모서리에 원점이 있는 좌표축에 대한 관성텐서를 먼저 $x_3$축을 중심으로 45° 회전한 다음, $x'_2$축을 중심으로 $cos^{-1}\sqrt{\frac{2}{3}}$ 회전한 경우의 텐서 변환 결과이다. 계산시간을 측정하기 위하여 **Timing[]**함수를 사용했다.

```
In[36]:=Timing[{
In[37]:=kdel[i_,j_]:=1/; i==j;
   kdel[i_,j_]:=0/; i ≠ j;
In[38]:=massrule={ρb^5 -> Mb^2};
         betarule={ Mb^2->β};
In[39]:=inertia=Table[Integrate[ρ(kdel[i,j]
        , Σ_{k=1}^3 (x_k)^2)
        ,{x_1,0,b},{x_2,0,b},{x_3,0,b}
        ,{i,3},{j,3}]/.massrule/.betarule ;
In[40]:=lambda1={{1/√2, 1/√2, 0},{1/√2, 1/√2, 0},{0,0,1}};
In[41]:=lambda2={{√(2/3), 0, 1/√3},{0,1,0},{-1/√3, 0, √(2/3)}};
In[42]:=lambda = lambda2.lambda1
In[43]:=similtensor=
lambda.inertia.Transpose[lambda]
          //Simplify//MatrixForm }]
```

*Out[43]=*

$$\{1.328\ \ Second, \{\begin{pmatrix} \frac{\beta}{6} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{11\beta}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11\beta}{12} \end{pmatrix}\}\} \tag{20}$$

식(17)와 식(20)은 같은 결과이다. 관성텐서를 처음부터 다시 계산하여 이 텐서를 얻는데 CPU(인텔2.66GHz) 사용시간은 1.328 Second 이다. 강의실에서 학생들과 함께 이를 직접계산 하려면 아마 30분 이상 소요될 작업이다. 매스매티카 시스템은 교재와 가장 근접한 명령어들을 사용하고 빠른 속도로 사용자 인터페이스인 *NoteBook*에 기호계산 결과를 보여준다. 위에서 사용한 매스매티카 명령어들: **Intergrate, Solve, Det, Table, Transpose, DiagonalMatrix[],Timing[]**들이 교재에서의 용어들과 거의 흡사하거나 같다. 그러므로 매스매티카 시스템이 가장 물리친화 적이라고 알려 저 있다 [11].

## 3. 2계 반 대칭 전자기장 텐서(Second-rank antisymmetric field-strength tensor,Reitz [3])

이제 식 (21)과 같이 3차원 벡터로 기술된 전기장과 자기장을, Reitz 교재 22장에 표시된 전자기장 텐서로 바꾸

고자 한다 [3]. SI 단위계를 취하고 *BaseIndices*를 Reitz교재와 맞게 조절하여 대부분의 학부교재에 참고할 수 있게 하였다.

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\varphi, \qquad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \tag{21}$$

또 반변 4-vector 좌표는 $x^4 = Ict$하여 $(x^1, x^2, x^3, x^4)$로 하였다. 여기서 $(I = \sqrt{-1})$이다. 벡터 퍼텐셜은 공변 4-potential $\mathscr{U}_\alpha$로 쓰면서 스칼라 퍼텐셜 $\varphi \to \mathscr{U}_4 = \frac{I}{c}\varphi$로 하여 4-potential을 구성하였다. 계수가 1인 텐서인 반변 4-vector $\mathscr{U}^\alpha$와 공변 4-vector $\mathscr{U}_\alpha$는 다음과 같은 텐서 변환규칙에 의하여 변환되어야 한다.

$$A'^\alpha = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} A^\beta \tag{22}$$

$$B'_\alpha = \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\alpha} B_\beta \tag{23}$$

이 규칙을 적용하여 공변 편 미분 연산자 $\partial_\alpha$와 반변 편 미분 연산자 $\partial^\alpha$들도 다음과 같이 텐서로 정의하였다.

$$\begin{aligned}\partial_\alpha = (\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4) &= (\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3}, \frac{\partial}{\partial x^4}) \\ &= (\vec{\nabla}, \frac{\partial}{\partial x^4})\end{aligned} \tag{24}$$

$$\begin{aligned}\partial^\alpha = (\partial^0, \partial^1, \partial^2, \partial^3) &= (\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}) \\ &= (\vec{\nabla}, -\frac{\partial}{\partial x^4})\end{aligned} \tag{25}$$

위식은 계량 텐서 $g^{\alpha\beta}$를 이용하여 확인 할 수 있다. $\partial^\alpha = g^{\alpha\beta}\partial_\beta = (\partial_1, \partial_2, \partial_3, -\partial_4)$이다. 이는 특수 상대성이론에서 정의되는 계량 텐서로서 **DiagonalMatrix[{1,1,1,-1}]**이다 특수 상대성 이론이나 기초적인 텐서 해석에 대한 좀 더 자세한 설명은 교재를 참고하기 바란다 [3–5]. 이제 3-vector $\vec{E}$와 $\vec{B}$는 다음과 같이 4-vector 텐서로 변환 할 수 있다.

식 (21)의 앞식의 양변에 $\frac{I}{c}$를 곱하면

$$\begin{aligned}\frac{I}{c}\vec{E} &= -\frac{I}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \frac{I}{c}\vec{\nabla}\varphi \\ &= \frac{\partial \vec{A}}{\partial x^4} - \vec{\nabla}\mathscr{U}_4\end{aligned}$$

4-potential로 정리하면

$$\frac{I}{c}E_\alpha = \frac{\partial \mathscr{U}_\alpha}{\partial x^4} - \frac{\partial \mathscr{U}_4}{\partial x^\alpha} \tag{26}$$

$$B_{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathscr{U}_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \mathscr{U}_\alpha}{\partial x^\beta} \tag{27}$$

식(26)에서 $\alpha$는 허깨비 인수 이므로, 인수 $\alpha$ 대신 $\beta$로 바꾸어도 상관없음으로, $\vec{E}$와 $\vec{B}$를 통합하여 텐서 $F^{\alpha\beta}$를 다음과 같이 정의 할 수 있다.

$$F^{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathscr{U}_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \mathscr{U}_\alpha}{\partial x^\beta} \tag{28}$$

이것이 2계 반대칭 전자기장 텐서 $F^{\alpha\beta}$이다 [3, 4]. 이 텐서 생성을 위한 매스매티카 시뮬레이션은 다음과 같다.

## 4. 전자기장 텐서 $F^{\alpha\beta}$ 생성을 위한 매스매티카 시뮬레이션

계수가 k인 텐서는 기본적으로 k-차원 테이블이므로 매스매티카에서는 리스트의 집합으로 텐서 계산 할 수 있다. 전절에서 보인바 와 같이 사중극자 모멘트 텐서, 관성 텐서는 매스매티카 시스템에서 직접 계산하였다. 4-vector 공간에서 전자기장 텐서 작성과 운용을 위해 Tensorial 3.0을 함께 사용하였다. 여기에서는 텐서를 정의하고 전자기장 텐서 $F^{\alpha\beta}$를 생성하며 변환하는 매스매티카 시뮬레이션을 제시하였다. 이 시뮬레이션은 *Mathematica* 5.1에서 작성되고 수행 되었으며 여기에 제시된 프로그램을 다운 받아서 [20] 매스매티카 시스템에서 그데로 수행 할 수 있다. 여기서는 독자의 편의를 위해 특정한 라벨번호의 입력에 대한 출력만을 제시하였다.

```
In[51]:=Needs["TensorCalculus3`Tensorial`"]
In[52]:=
        oldindices=BaseIndices;
        oldflavors=Indexflavors;
        ClearIndexFlavor/@oldflavors;
        DeclareBaseIndices [{1,2,3,4 }]
        DeclareIndexFlavors
        /@{{red,Red},{rocket,SuperStar}};
In[53]:=DefineTensorShortcuts[{{x,A,B,𝒰,E},1},
        {{F,ℱ,g,Λ},2},{{F,ε},4}]
        labs={x,δ,g,Γ}
In[54]:={Fuu[αβ],Fdd[αβ],ℱuu[α,β],Ad[β],xu[α]}
Out[54]={F^αβ,F_αβ,ℱ^αβ,A_β,x^α}
```

먼저 전기장 텐서 $E_\beta$와 자기장 텐서 $B_{\alpha\beta}$를 매스매티카에서 정의하고 성분으로 표시하였다. 여기서는 특별히 언급하지 않는 경우 $\frac{I}{c}E_\beta$대신에 $E_\beta$로 표시 하기로 한다.

```
In[55]:=Ed[β]==PartialD[labs][𝒰d[β],xu[4]
          -PartialD[labs][𝒰d[4],xu[β]]
Out[55]=
```

$$E_\beta == \frac{\partial \mathscr{U}_\beta}{\partial x^4} - \frac{\partial \mathscr{U}_4}{\partial x^\beta} \tag{29}$$

전기장 $E_\beta$을 성분별로 나타내려면

```
In[56]:=% //EinsteinArray[{1,2,3}]
Out[56]=
```

$$E_1 = \frac{\partial \mathscr{U}_1}{\partial x^4} - \frac{\partial \mathscr{U}_4}{\partial x^1}, E_2 = \frac{\partial \mathscr{U}_2}{\partial x^4} - \frac{\partial \mathscr{U}_4}{\partial x^2}, E_3 = \frac{\partial \mathscr{U}_3}{\partial x^4} - \frac{\partial \mathscr{U}_4}{\partial x^3} \tag{30}$$

자기장 $B_{\alpha\beta}$ 도 성분별로 표시하려면

```
In[57]:=Bd[αβ]==PartialD[labs][𝒰d[β],xu[α]
        -PartialD[labs][𝒰d[α],xu[β]]
Out[57]=
```

$$B_{\alpha\beta} == \frac{\partial \mathscr{U}_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \mathscr{U}_\alpha}{\partial x^\beta} \tag{31}$$

```
In[58]:=% //EinsteinArray[{1,2,3}]
```

*Out[58]=*

$$B_{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathscr{U}_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \mathscr{U}_\alpha}{\partial x^\beta}$$
$$= \begin{pmatrix} B_{11}=0 & B_{12}=\frac{\partial \mathscr{U}_2}{\partial x^1}-\frac{\partial \mathscr{U}_1}{\partial x^2} & B_{13}=\frac{\partial \mathscr{U}_3}{\partial x^1}-\frac{\partial \mathscr{U}_1}{\partial x^3} \\ B_{21}=\frac{\partial \mathscr{U}_1}{\partial x^2}-\frac{\partial \mathscr{U}_2}{\partial x^1} & B_{22}=0 & B_{23}=\frac{\partial \mathscr{U}_3}{\partial x^2}-\frac{\partial \mathscr{U}_2}{\partial x^3} \\ B_{31}=\frac{\partial \mathscr{U}_1}{\partial x^3}-\frac{\partial \mathscr{U}_3}{\partial x^1} & B_{32}=\frac{\partial \mathscr{U}_2}{\partial x^3}-\frac{\partial \mathscr{U}_3}{\partial x^2} & B_{33}=0 \end{pmatrix} \tag{32}$$

여기서 우리는 $E_\beta$와 $B_{\alpha\beta}$를 통합하여, 식 (28)에서 정의한데로, 반변텐서 $F^{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathscr{U}_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \mathscr{U}_\alpha}{\partial x^\beta}$로 정의 할 수 있다. 식(32)에서 $B_{23} \to B_1, B_{31} \to B_2, B_{12} \to B_3$가 된다. 식(30)과 (32)에서 정의한 $\vec{E}$, $\vec{B}$의 성분들에 해당되는 $F^{\alpha\beta}$의 요소 값들을 다음과 같이 할당하여 정리한다.

$$\begin{aligned} E_1 &= (\frac{\partial \mathscr{U}_1}{\partial x^4} - \frac{\partial \mathscr{U}_4}{\partial x^1}) = \partial^4 \mathscr{U}_1 - \partial^1 \mathscr{U}_4 = F^{41} \\ E_2 &= (\frac{\partial \mathscr{U}_2}{\partial x^4} - \frac{\partial \mathscr{U}_4}{\partial x^2}) = \partial^4 \mathscr{U}_2 - \partial^2 \mathscr{U}_4 = F^{42} \\ E_3 &= (\frac{\partial \mathscr{U}_3}{\partial x^4} - \frac{\partial \mathscr{U}_4}{\partial x^3}) = \partial^4 \mathscr{U}_3 - \partial^3 \mathscr{U}_4 = F^{43} \\ B_1 &= \frac{\partial \mathscr{U}_3}{\partial x^2} - \frac{\partial \mathscr{U}_2}{\partial x^3} = \partial^2 \mathscr{U}_3 - \partial^3 \mathscr{U}_2 = F^{23} \\ B_2 &= \frac{\partial \mathscr{U}_1}{\partial x^3} - \frac{\partial \mathscr{U}_3}{\partial x^1} = \partial^3 \mathscr{U}_1 - \partial^1 \mathscr{U}_3 = F^{31} \\ B_3 &= \frac{\partial \mathscr{U}_2}{\partial x^1} - \frac{\partial \mathscr{U}_1}{\partial x^2} = \partial^1 \mathscr{U}_2 - \partial^2 \mathscr{U}_1 = F^{12} \end{aligned} \tag{33}$$

$F^{\alpha\beta}$의 반대칭성에 의하여

$$\begin{aligned} F^{14} = -F^{41}, F^{24} = -F^{42}, F^{34} = -F^{43} \\ F^{32} = -F^{23}, F^{13} = -F^{31}, F^{21} = -F^{12} \end{aligned} \tag{34}$$

이제 $F^{\alpha\beta}$를 정의하고 **EinsteinArray**로 정렬한 다음, 앞에서 구한 식 (33)과 (34)을 참조하여 $\vec{E}$, $\vec{B}$의 성분값들을 $F^{\alpha\beta}$의 요소에 할당 할 수 있다.

```
In[61]:=Fuu[α,β]==PartialD[labs][𝒰d[β],xu[α]],
        -PartialD[labs][𝒰d[α],xu[β]]
In[62]:= ebfield = % //EinsteinArray[]
In[63]:=eRule= {ebfield[[4,1]]->Ed[1]
           ,ebfield[[4,2]]->Ed[2]
           ,ebfield[[4,3]]->Ed[3]
           ,ebfield[[1,4]]->-Ed[1]
           ,ebfield[[2,4]]->-Ed[2]
           ,ebfield[[3,4]]->-Ed[3]}
In[64]:=bRule= {ebfield[[2,3]]->Bd[1]
           ,ebfield[[3,1]]->Bd[2]
           ,ebfield[[1,2]]->Bd[3]
           ,ebfield[[3,2]]->-Bd[1]
           ,ebfield[[1,3]]->-Bd[2]
           ,ebfield[[2,1]]->-Bd[3]}
In[65]:= ebfield/.eRule/bRule
```

*Out[65]=*

$$F^{\alpha\beta} = \frac{\partial \mathscr{U}_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \mathscr{U}_\alpha}{\partial x^\beta}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial \mathscr{U}_2}{\partial x^1}-\frac{\partial \mathscr{U}_1}{\partial x^2} & \frac{\partial \mathscr{U}_3}{\partial x^1}-\frac{\partial \mathscr{U}_1}{\partial x^3} & \frac{\partial \mathscr{U}_4}{\partial x^1}-\frac{\partial \mathscr{U}_1}{\partial x^4} \\ \frac{\partial \mathscr{U}_1}{\partial x^2}-\frac{\partial \mathscr{U}_2}{\partial x^1} & 0 & \frac{\partial \mathscr{U}_3}{\partial x^2}-\frac{\partial \mathscr{U}_2}{\partial x^3} & \frac{\partial \mathscr{U}_4}{\partial x^2}-\frac{\partial \mathscr{U}_2}{\partial x^4} \\ \frac{\partial \mathscr{U}_1}{\partial x^3}-\frac{\partial \mathscr{U}_3}{\partial x^1} & \frac{\partial \mathscr{U}_2}{\partial x^3}-\frac{\partial \mathscr{U}_3}{\partial x^2} & 0 & \frac{\partial \mathscr{U}_4}{\partial x^3}-\frac{\partial \mathscr{U}_3}{\partial x^4} \\ \frac{\partial \mathscr{U}_1}{\partial x^4}-\frac{\partial \mathscr{U}_4}{\partial x^1} & \frac{\partial \mathscr{U}_2}{\partial x^4}-\frac{\partial A_4}{\partial x^2} & \frac{\partial A_3}{\partial x^4}-\frac{\partial A_4}{\partial x^3} & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -E_3 \\ E_1 & E_2 & E_3 & 0 \end{pmatrix} \tag{35}$$

이 텐서를 $E_\alpha$대신 $\frac{I}{c}E_\alpha$로 바꾸어 다시 쓰면

*Out[67]=*

$$F^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & B_3 & -B_2 & -\frac{I}{c}E_1 \\ -B_3 & 0 & B_1 & -\frac{I}{c}E_2 \\ B_2 & -B_1 & 0 & -\frac{I}{c}E_3 \\ \frac{I}{c}E_1 & \frac{I}{c}E_2 & \frac{I}{c}E_3 & 0 \end{pmatrix} \tag{36}$$

```
In[66]:= freitz= %
```

이것이 전기장 $\vec{E}$와 자기장 $\vec{B}$를 통합한 전자기장 텐서 $F^{\alpha\beta}$이다. 바로 Reitz 교재의 식 (22-29)이다 [3, 9]. 이제 텐서 $F^{\alpha\beta}$는 매스매티카 시스템에 텐서의 요소 값과 함께 *freitz*의 이름으로 매스매티카의 Tensorial 3.0에 저장됨으로 필요할 때 언제던지 호출하여 사용 할 수 있다. 또한 막스웰 방정식을 이 텐서로 다시 쓸 수 있다 [19].

## 5. 전자기장 텐서의 좌표변환

민코프스키 공간에서 새로운 좌표계가 구 좌표계에 대하여 $x$ 방향으로 $\vec{u}$의 속도로 운동할 때 로렌츠 변환은

*Out[68]=*

$$\Lambda_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & I\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -I\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \tag{37}$$

```
In[69]:=lgamma= %
```

여기서 $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$이고 $\beta = \frac{u}{c}$이다.

이 텐서도 *lgamma*의 이름으로 저장한다. 일단 텐서로 정의하여 사용하면 빠르고 강력한 텐서 해석을 할 수 있다. 식(36)에서 구한 전자기장 텐서의 텐서 변환 매스매티카 코딩은 다음과 같다.

```
In[71]:=SetTensorValueRules[Fuu[α,β],freitz]
In[72]:=SetTensorValueRules[Λdd[χ,λ],lgamma]
In[73]:=SetTensorValueRules[F]
In[74]:=SetTensorValueRules[Λ]
In[75]:=Clear[primef];
```

```
e1rule={IE1γ²/c − IE1β²γ²/c -> I/c E1
        , IE1β²γ²/c − IE1γ²/c  -> -I/c E1};
gammarule={γ² − β²γ² ->1, β²γ² − γ² ->-1};
In[76]:=Λdd[μ,α] Λdd[ν,β]Fuu[α,β]
% // MetricSimplify[Λ]
%% //ToArrayValues
```

*Out[76]=* $F^{\alpha\beta}\Lambda_{\mu\alpha}\Lambda_{\nu\beta}$

*Out[77]=* $F_{\mu\nu}$

*Out[78]=*

$$F'_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & B_3\gamma - \gamma\beta\frac{E_2}{c} & -B_2\gamma - \gamma\beta\frac{E_3}{c} & +\frac{IE_1}{c}(\beta^2\gamma^2 - \gamma^2) \\ -B_3\gamma + \gamma\beta\frac{E_2}{c} & 0 & B_1 & IB_3\beta\gamma - \frac{IE_2\gamma}{c} \\ B_2\gamma + \gamma\beta\frac{E_3}{c} & -B_1 & 0 & -IB_2\beta\gamma - \frac{IE_3\gamma}{c} \\ -\frac{IE_1}{c}(\beta^2\gamma^2 - \gamma^2) & -IB_3\beta\gamma + \frac{IE_2\gamma}{c} & IB_2\beta\gamma + \frac{IE_3\gamma}{c} & 0 \end{pmatrix} \tag{38}$$

*In[79]:=* `prime/.e1rule//MatrixForm`

*Out[79]=*

$$F'_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & \gamma(B_3 - \frac{\beta}{c}E_2) & \gamma(-B_2 - \frac{\beta}{c}E_3) & -\frac{I}{c}E_1 \\ \gamma(-B_3 + \frac{\beta}{c}E_2) & 0 & B_1 & \gamma(IB_3\beta - \frac{I}{c}E_2) \\ \gamma(B_2 + \frac{\beta}{c}E_3) & -B_1 & 0 & \gamma(-IB_2\beta - \frac{I}{c}E_3) \\ \frac{I}{c}E_1 & \gamma(-IB_3\beta + \frac{I}{c}E_2) & \gamma(IB_2\beta + \frac{I}{c}E_3) & 0 \end{pmatrix} \tag{39}$$

이 결과는 Reitz 교재의 식(22-33)-(22-40)의 결과를 매스매티카에서 똑같이 구한 것이다. 이것은 계수가 2인 텐서의 변환규칙에 따라 얻은 결과로 로렌츠 부스트 변환을 연속해서 두 번 수행하여 얻어진 것이다. 이 텐서로부터 로렌츠 부스트의 방향과 평행한(‖) 성분과 수직(⊥)한 성분으로 구분한 벡터방정식으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \vec{E}'_{\parallel} &= \vec{E}_{\parallel}, \qquad \vec{E}'_{\perp} = \gamma[\vec{E}_{\perp} + \vec{u}\times\vec{B}] \\ \vec{B}'_{\parallel} &= \vec{B}_{\parallel}, \qquad \vec{B}'_{\perp} = \gamma[\vec{B}_{\perp} - \frac{1}{c^2}\vec{u}\times\vec{E}] \end{aligned} \tag{40}$$

여기에서 평행 성분들은 좌표변환에 의해 영향을 받지 않지만 수직성분은 $\vec{u}\times\vec{B}$ 혹은 $-\vec{u}\times\vec{B}$만큼 수정되어 짐을 알 수 있다. 이는 구 좌표계에서 구한 전자기장 텐서 $F^{\alpha\beta}$(식 36)와 변환된 텐서 $F'_{\alpha\beta}$(식 39)를 비교 할 수 있기 때문에 해석이 가능한 것이다. 이와같이 텐서 해석으로 전자기장의 특성을 확실히 규명하게 된 것이다. 이것은 자연계의 물리학적 시스템을 텐서로 기술해야 하는 한 가지 예 일뿐이다 [7, 8, 10]. 앞에서 계산한 세 점 전하의 퍼텐셜도 사중극자 모멘트 텐서, 식(6)을 계산하지 안 했더라면 퍼텐셜은 0 일 수밖에 없다. 우리가 다루어야 하는 자연계의 물리학적 시스템은 궁극적으로는 모두 텐서로 기술된다.

## IV. 결 론

물리학도들은 물리학적 시스템을 수학적으로 기술하는데 필요한 도구인 스칼라, 벡터, 행렬, 연산자, 텐서 등을 익히기 위한 노력과 시간을 많이 할애한다. 그 결과 벡터, 행렬, 미분 연산자에 대해서는 대 부분 익숙해 있으며 그의 운용능력도 잘 갖추고 있으나 텐서 해석은 생소하거나 소홀한 경향이 있다. 그러나 자연계의 모든 물리적 시스템은 텐서로 기술될 때 완성되며 물리학적 지식체계도 정립되기 때문에 완성도 높은 물리학 학습을 위해서는 밀도 있는 텐서 학습 전략이 필요하다. 여기에서 우리는 벡터, 행렬, 미분연산자에 대한 기본적인 지식을 갖추고 있는 물리학도나 연구자들이 짧은 시간에 효과적으로 텐서 해석 능력을 갖출 수 있는 교수학습 포트폴리오를 제공하였다. 이를 위해 Marion교재에서 관성 텐서, Reitz교재에서 사중극자 모멘트 텐서 및 전자기장 텐서 $F^{\alpha\beta}$의 생성과 변환과제를 이해하고 확인 할 수 있는 매스매티카 시뮬레이션을 제시 하였다. 이를 통하여 좀 더 역동적이고 적극적인 텐서 학습이 이루어지기를 바라며, 물리학도들이 정교하고 우아한 물리학적 지식체계를 이해하고 확립해 나가는 데에 도움이 되기를 기대한다.


[1] Keith R. Symon, *Mechanics*, (Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1971), Chap.10. pp. 410-443.

[2] J.B.Marion, *Classical dynamics*, (Academic Press, San Diego, 1970), Chap.12.pp. 359-384.

[3] J.R.Reitz, F.J.Milford, and W.Christy, *Foundation of electromagnetic theory, 4th ed.*(Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1993), Chap.2. pp.46-55; Chap.22. pp. 558-574.

[4] J.D.Jackson, *Classical electrodynamics*, (Jon Wiley & Sons, New York, 1975),Chap.11. pp. 532-556.

[5] G.B.Arfken, *Mathematical methods for physicists*, (Academic Press, San Diego, 1970), Chap.3.

[6] Rovert L. Zimmerman and Frederic I. Olness, *Mathematica for Physics*, (Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1995), Chap. 10. pp. 578-581.

[7] G.R.Fowles, *Introduction to Modern Optics*, (Holt,Rinehart and Winston, New York, 1975), p.169.

[8] I.S.Sokolnikoff, *TENSOR ANALYSIS*, (Jon Wiley & Sons, New York, 1964), Chap.4. p.117.

[9] H.Goldstein, *CLASSICAL MECHANICS*, (Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1980), p.582.

[10] L.Parker and S.M.Christensen, *MathTensor*, (John Wesley, Boston, 1994),Chap.1; PART C.
[11] http://www.wolfram.com/solutions/highered/
[12] http://farside.ph.utexas.edu/teaching/jk1/node12.html
[13] http://smc.vnet.net/MathTensor.html
[14] http://library.wolfram.com/infocenter/MathSource/5101/
[15] H.Soleng, Relativity and Scientific Computing,210(1996).
[16] Bernd Thaller, The Mathematica Journal 7(2),163(1998).
[17] Phil Lamsden, The Mathematica Journal 8(2),342(2001).
[18] H.J.Yun, SAEMULLI 43(5), 261(2001); 46(5), 249(2003); 50(3), 1341(2005); 52(2), 87(2006).
[19] H.J.Yun, *Establishment and Transformation of Electromagnetic Field Tensor $F^{\alpha\beta}$ in 4-vector Spacetime with Mathematica*, in submit to SAEMULLI.
[20] http://home.mokwon.ac.kr/∼heejy/availables/treitz.nb

# *Mathematica* Simulations for the Tensor Analysis and Manipulations in Minkowski Space

Hee-Joong YUN

(Received 8 August, 2006, Received 8 August, 2006)

For the laws of physics are expressed in a manner which makes their invariance under the coordinate transformations manifest, it should be written in terms of tensors. Furthermore electromagnetic fields in terms of tensor make the characters and behaviors of the electromagnetic fields through the inhomogeneous, anisotropic, and incompressible medium manifest. The electromagnetic fields are expressed completely in tensor form $F^{\alpha\beta}$ which imply both the electric field $\vec{E}$ and magnetic field $\vec{B}$ than in the vector fields separately. The *Mathematica* simulations generating and transforming the tensors include the quadrupole moment tensor and inertia tensor in a 3-vector space and $F^{\alpha\beta}$ tensor in Minkowski space are shown, which will enhance the capabilities of students or researchers in tensor analysis and the comprehension to the elegant feature of complicated physics structure.

0cm

PACS number:01.30.Pp,01.50.Ht,03.50.De
Keywords: Quadrupole moment tensor, Inertia tensor, Electromagnetic field tensor, special relativity, *Mathematica* simulation